9 Ekvivalenčna relacija. Ekvivalenčni razred.

57. **(2. kolokvij, januar 2022.)** Na množici celih števil $\mathbb{Z}$ definiramo relacijo R:

$$aRb \qquad \Leftrightarrow \qquad a = b \text{ ali } a = -b.$$

Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija in določi ekvivalenčne razrede.

58. Na množici realnih števil $\mathbb{R}$ definiramo relacijo $\sim$:

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad x \text{ in } y \text{ sta oba pozitivna, ali sta oba negativna, ali sta oba ničla.}$$

Pokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija, določite ekvivalenčne razrede in kvocientno množico $\mathbb{R}/_\sim$.

59. Na množici $S = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ definiramo relacijo $\sim$:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \qquad \Leftrightarrow \qquad ad = bc.$$

Utemeljite, ali je $\sim$ ekvivalenčna relacija. Če je $\sim$ ekvivalenčna relacija, poiščite ekvivalenčna razreda $[\frac{2}{5}]_\sim$ in $[7]_\sim$, ter razložite, kaj predstavlja kvocientna množica $S/_\sim$.

60. Na množici naravnih števil $\mathbb{N}$ definiramo relacijo R:

$$xRy \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4 \text{ deli } x + 3y.$$

Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija in določi ekvivalenčne razrede.

61. Naj bo $S = \mathbb{Z}$. Na množici S definiramo relacijo R s predpisom

$$aRb \quad \Longleftrightarrow \quad 4 \text{ deli izraz } a^2 - b^2.$$

(a) Pokažite, da je R ekvivalenčna relacija na množici S.

(b) Poiščite ekvivalenčne razrede relacije R.

62. Na množici realnih števil $\mathbb{R}$ definiramo relacijo $\sim$:

$$a \sim b \qquad \Leftrightarrow \qquad a - b \in \mathbb{Z}.$$

Utemeljite, ali je $\sim$ ekvivalenčna relacija. Če je $\sim$ ekvivalenčna relacija, poiščite ekvivalenčna razreda $[\frac{1}{2}]_\sim$ in $[\sqrt{2}]_\sim$.

63. Naj bo E množica 4-bitnih binarnih nizov:

$$E = \{0000, 0001, 0010, 0011, \ldots, 1110, 1111\}.$$

Na E definiramo relacijo R s predpisom

$$xRy \qquad \Leftrightarrow \qquad x \text{ in } y \text{ imata enako število 1.}$$

Pokažite, da je R ekvivalenčna relacija, in določite ekvivalenčne razrede. Odgovor natanko utemeljite!

64. **(teoretična naloga)** Naj bodo S dana neprazna množica, $\sim$ ekvivalenčna relacija na množici S in $[S]_\sim$ kvocientna množica množice S. Dokažite, da je $[S]_\sim$ particija množice S.

Vse naloge so prenesene z naslednje spletne strani:
https://osebje.famnit.upr.si/~penjic/teaching.html.
Na isti strani lahko bralec najde vse rešitve podanih nalog.